Chapitre I
Oscillations libres non amorties des systèmes à un seul degré de liberté

1. Introduction :

Sous la vibration on comprendra tout les processus oscillatoires qui ont lieu dans les appareils et les machines comme la suite de l'excitation des constructions par des forces dynamiques.

Les vibrations se présentent pendant le transport et l'exploitation.

On distingue deux types de sources excitant les oscillations : extérieures et intérieures.

Sources extérieures :

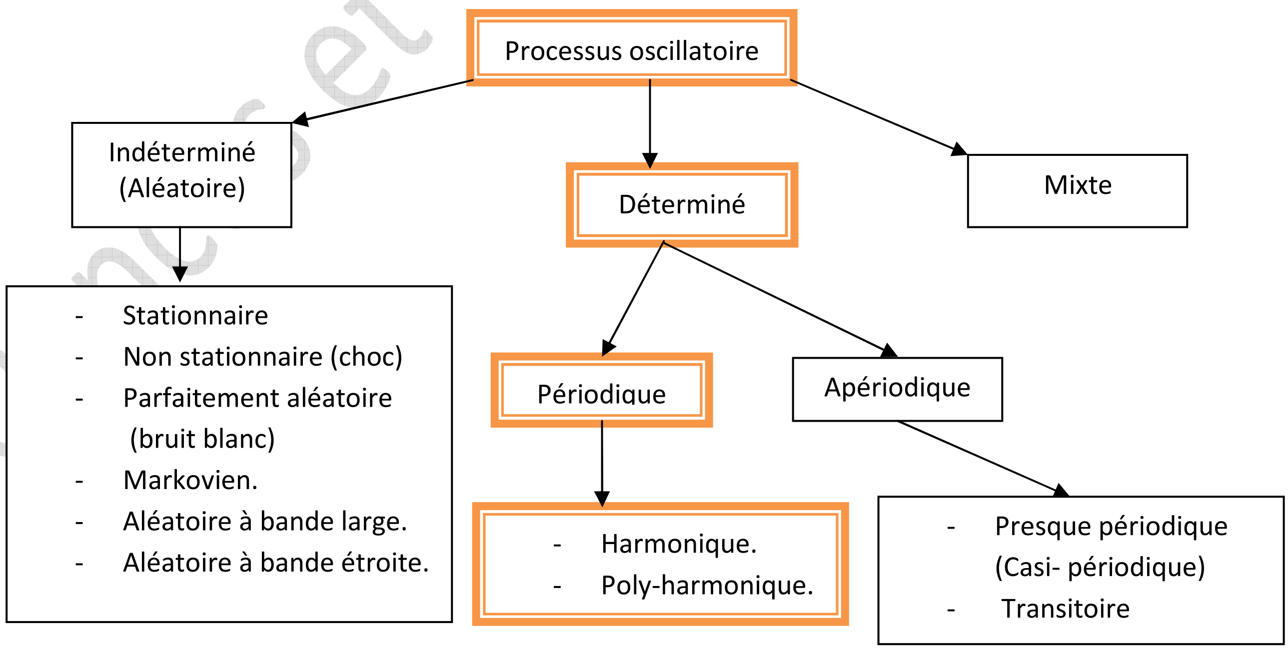
- Irrégularité de la route ;
- turbulence de l'atmosphère ;
- bruit acoustique;
- agitation de l'eau.

Et comme sources intérieures :

- Rotation non uniforme d'un arbre ;
- rotations des pièces d'une transmission ou des mécanismes.

D'habitude les vibrations produites par les sources extérieures sont plus intenses par rapport aux celles des sources intérieures.

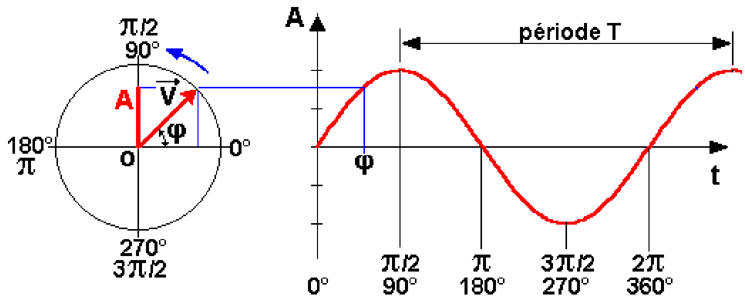
2. Classification des processus oscillatoires (vibratoires) :



3. Caractéristique d'une oscillation sinusoïdale harmonique :

Une oscillation est dite périodique, si les variations de son amplitude se reproduisent régulièrement au bout d'une période T constante.

La figure ci-dessous montre la courbe d'une oscillation « signal » périodique.



La durée d'une période corresponde à une rotation de 360 degrés (ou 2 π radians) sur le cercle trigonométrique.

La période : C'est la durée d'un cycle, elle s'exprime en seconde et ses sous-multiples (voir unités) :

Milliseconde:$1[ms] = 0{,}001\ [s]$

Microseconde: $1[\mu s] = 0{,}000.001\ [s]$

Nanoseconde: $1[ns] = 0{,}000.000.001[s]$

La fréquence : Elle correspond au nombre de cycles effectués par secondes. L'unité est l'Hertz (symbole Hz) avec ses multiples :

Kilohertz, 1 kHz = 1000 Hz, Mégahertz, 1 MHz = 1000 000 Hz, Gigahertz, 1 GHz = 1000 000 000 Hz.

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T} \quad ou \quad T = \frac{1}{f}}$$

On peut aussi associer les unités suivantes : ms et kHz, µs et MHz, ns et GHz.

<u>Exemple de calcul :</u> Pour une fréquence de 50 Hz la période est égale à : $T = \frac{1}{50} = 20\ [ms]$.

La pulsation : Elle s'exprime en $radian/seconde$ et se calcule à l'aide de la formule :

$$\boldsymbol{\omega = 2.\pi.f} \quad ou \quad \boldsymbol{\omega = \frac{2.\pi}{T}}$$

Cette fonction peut s'écrire (voir la figure ci-dessus): $\boldsymbol{a(t) = A.sin(\omega.t + \varphi)}$

Où : $\boldsymbol{A}$: est l'amplitude maximale, $\boldsymbol{\omega}$: la pulsation $[{}^{rd}/_{s}]$, $\boldsymbol{t}$: le temps $[\,s\,]$, T: la période $[\,s\,]$

$\boldsymbol{\varphi}$: Angle de phase $[rd]$, $\boldsymbol{f}$: fréquence $[Hz]\ ou\ [{}^{1}/_{s}]$

4. Quelques processus oscillatoires :

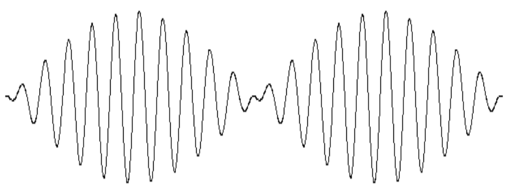
Oscillatoire harmonique :

Casi- harmonique :

Distortionnel sinusoïdal :

Harmonique pendant le processus transitoire :

Harmonique pendant les battements :



Aléatoire à bande large :

Aléatoire à bande étroite :

5. Définition de la vibration :

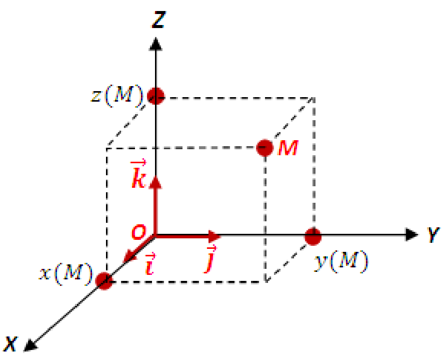
On entend par vibration tout mouvement qui avec ou sans vitesse initiale, après un déplacement initial, oscille d'une manière libre. Exemple :

- Systèmes mécaniques : Masse-ressort, pendule simple.
- Systèmes électriques.
- Systèmes acoustiques.
- Systèmes optiques : lasers.

6. Coordonnées généralisées :

6.1. Coordonnées cartésiennes :

On définit par les coordonnées cartésiennes d'un point M par rapport à l'origine O par le vecteur de position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

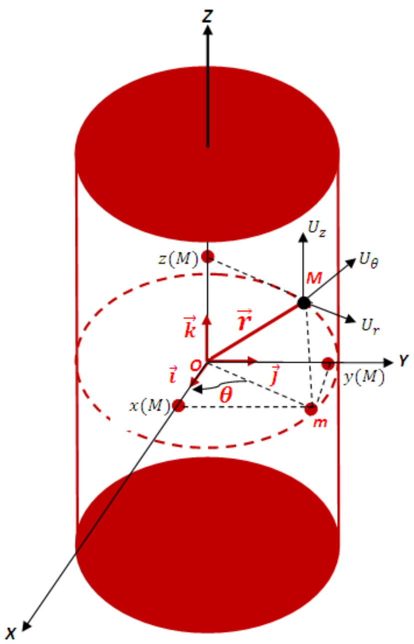


$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x.\vec{U}x + y.\vec{U}y + z.\vec{U}z$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

6.2. Coordonnées cylindriques :

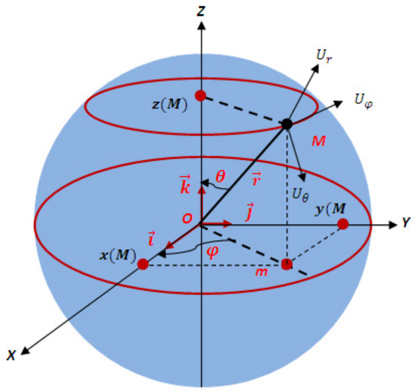


$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{U}r + z.\vec{U}z$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r.sin\theta \\ y = r.cos\theta \\ z = z \end{cases}$$

6.3. Coordonnées sphériques :

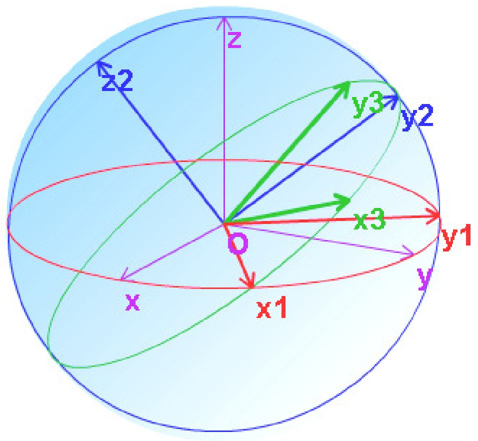


$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{U}r + z.\vec{U}z$$

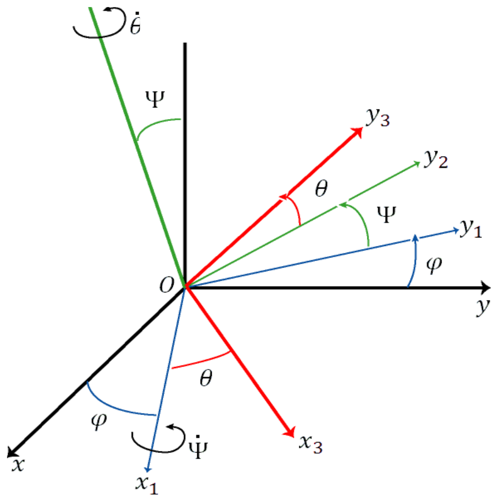
Coordonnées cartésiennes :

$$x = r.sin\theta.cos\varphi$$
$$y = r.sin\theta.sin\varphi$$
$$z = r.cos\theta$$

6.3. Angle d'Euler :



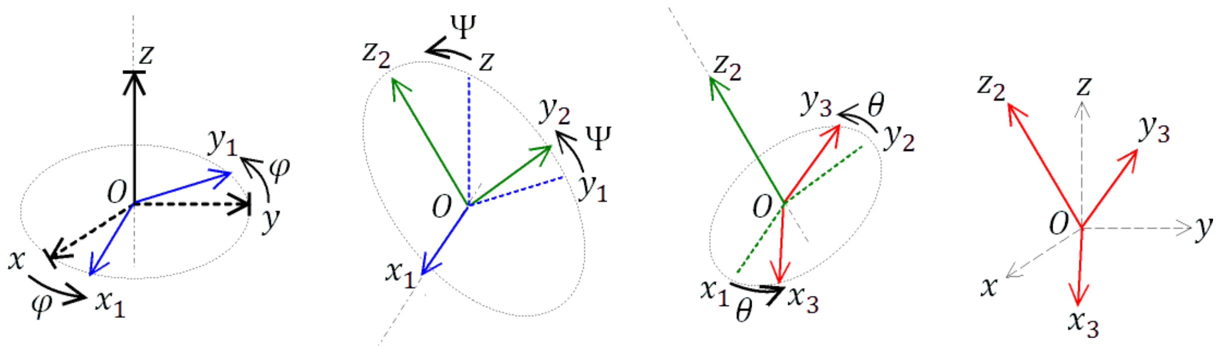
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{U}r + z.\vec{U}z$$



Précession: par rotation de φ autour de Oz : $x \to x_1$ et $y \to y_1$

Nutation: par rotation de Ψ autour de Ox_1 : $y_1 \to y_2$ et $z \to z_2$ $(z_2 = z_3)$

Rotation propre: par rotation de θ autour de Oz_2 : $x_1 \to x_3$ et $y_2 \to y_3$



La position d'un point M dans l'espace peut être déterminée par trois coordonnées suivant les axes (x, y, z).

La position d'un corps solide dans l'espace peut être définie par six coordonnées :

- Trois coordonnées relatives au centre de gravité.
- Trois coordonnées liées aux angles d'Euler($Précessin\ \Psi, nutation\ \theta, rotation\ propre\ \varphi$).

Les coordonnées généralisées, d'un système de $\boldsymbol{P}$ points matériels et $\boldsymbol{Q}$ corps solides est définie par :

$$\boldsymbol{N = 3.P - 6.Q} \quad \text{coordonnées.}$$

On désigne par :

$\boldsymbol{q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots\dots\dots.. q_N(t)}$ Les coordonnées généralisées.

$\boldsymbol{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), \dots\dots\dots \dot{q}_N(t)}$ Les vitesses généralisées.

7. Degré de liberté :

C'est le nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour déterminer la position de chaque élément d'un système pendant son mouvement à tout instant.

On écrit alors : $d = N - r$ où $N = 3P - 6Q$ ➔ $d = 3P - 6Q - r$

d: Degré de liberté (ddl).

N: Nombre de coordonnées généralisées.

r: Nombre de relations entre les coordonnées (nombre de liaisons).

Exemple :

Soit un système mécanique constitué de deux points M_1 et M_2 reliés par une tige de longueur l. Trouver le nombre de degré de liberté de ce système.

$$\left.\begin{array}{l} M_1(x_1, y_1, z_1) : 3 \\ M_2(x_2, y_2, z_2) : 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow N = 6$$

Equation de liaison : $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = C^{te} \Longrightarrow r = 1$

Donc : $d = 5$ $(d = N - r \implies d = 6 - 1)$

8. Etablissement de l'équation du mouvement :

Pour établir l'équation du mouvement pour un système mécanique passif, il est impératif d'établir l'équation différentielle qui reflète le comportement du mobile (système) on se basant sur un modèle mécanique bien connu.

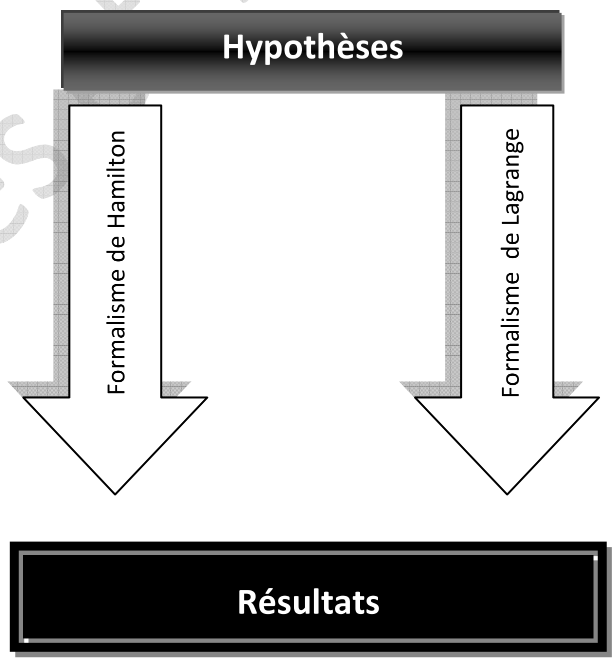
Un système mécanique de protection ou d'isolation est dit **passif** s'il est constitué des éléments mécaniques ordinaires tels qu'un ressort, amortisseur. Et il est dit **actif** s'il est constitué d'un système asservi. Les systèmes **semi-actifs** se sont des systèmes combinés « passif et actif en même temps ».

Parmi les modèles mathématiques connus, on utilise souvent le modèle de **Maxwell** qui repose sur un système constitué d'une masse et un ressort, et le modèle de **Kelvin-Voigt** composé également d'une masse, un ressort et en plus un amortisseur.

Approximation et hypothèses :

Dans notre cours, on considère que le système est **linéaire** et que la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse « on ne considère que l'amortissement visqueux sans tenir compte des autres types d'amortissements » ; et on utilise le modèle de Maxwell et celui de Kelvin-Voigt pour modéliser un système mécanique. Aussi on considère que les éléments mécaniques constituant le système sont linéaires et l'action des perturbations extérieures est aussi linéaire.

Donc à partir d'un modèle, on établi l'équation différentielle on se basant principalement sur le formalisme de Lagrange, et l'intégration de l'EDF permet de donner l'équation finale du mouvement.



8.1. Formalisme de Lagrange :

Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange $L = T - U$ et défini par :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right\} = 0$$

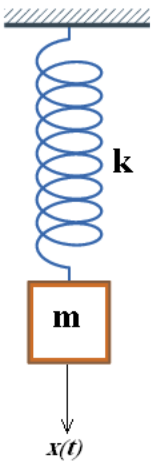
Où L: Fonction de Lagrange
T: L'énergie cinétique du système
U: L'énergie potentielle du système

Pour un système à un degré de liberté : $n = 1\ ddl$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

Pour un déplacement x, l'équation de Lagrange est une fonction de $\dot{x}$, x et t : $L(\dot{x}, x, t)$, ainsi la variable q sera remplacé par x. Pour une rotation φ , q sera remplacé par φ et l'équation de Lagrange devient est une fonction de $\dot{\varphi}$, φ et t : $L(\dot{\varphi}, \varphi, t)$,

Exemple 1: Soit un système mécanique constitué d'une masse m relié à un ressort de raideur k .
Trouver l'équation différentielle.



$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 \\ U &= \frac{1}{2}.k.x^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{On calcul}} L = T - U$$

Lagrangien du système : $L = \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 - U = \frac{1}{2}.k.x^2$

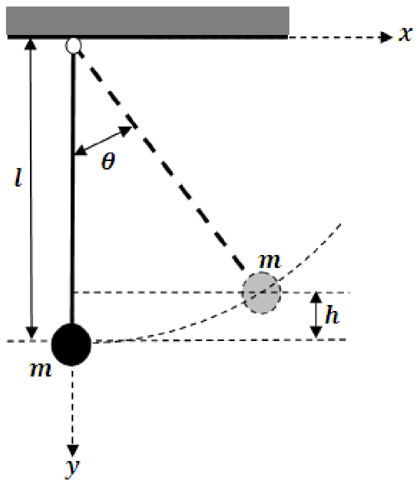
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\text{Après dérivation}} \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m.\ddot{x} & \text{.......... (1)} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -k.x & \text{................ (2)} \end{cases}$$

(1)-(2) $m.\ddot{x} + k.x = 0$ et on divise par m on aura : $\ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0$ .... (3)

L'équation (3) peut être aussi écrite comme suit : $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0{}^2.x = 0}$

qui est une équation différentielle ordinaire de second ordre sans second membre, où $\boldsymbol{\omega_0}$ est la **pulsation propre** du système qu'on peut aussi appeler **pulsation naturelle** avec $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

Exemple 2: Pendule simple (pendule pesant)



$$m\begin{cases} l.sin\theta \\ l.cos\theta \end{cases}$$

$$sin\theta = \frac{x}{l} \rightarrow x = l.sin\theta$$

$$sin\theta \approx \theta \quad x = l.\theta \quad \dot{x} = l.\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}.m\dot{x}^2 \quad on\ remplaçant\ \dot{x}\ par\ sa\ valeur\ \dot{x} = l.\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}.m.l^2\dot{\theta}^2$$

$U = m.g.h$ or $h = l(1 - cos\theta)$ => $U = m.g.l.(1 - cos\theta)$

$$\left[\begin{array}{c} F = -\frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow U = -m.g\int_i^f \partial y \quad => U = -m.g.(y_f - y_i) = -m.g.(l.cos\theta - l) \\ U = m.g.l.(1 - cos\theta) \end{array}\right]$$

Calcul du Lagrangien : $L = T - U$

On remplaçant T et U dans L par ses valeurs déjà calculé on trouve :

$$L = \frac{1}{2}.m.l^2\dot{\theta}^2 - m.g.l.(1 - cos\theta)$$

Calcul des dérivées partielles :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m.l^2.\ddot{\theta} \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m.g.l.sin\theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

$(1) - (2)$ $m.l^2.\ddot{\theta} + m.g.l.sin\theta = 0$

Dans le cas des faibles oscillations $sin\theta \approx \theta$ cela implique que : $m.l^2.\ddot{\theta} + m.g.l.\theta = 0$

$$l.\ddot{\theta} + g.\theta = 0 \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\theta = 0 \quad \ddot{\theta} + {\omega_0}^2.\theta = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

8.2. Solution de l'équation différentielle (EDF):

On reprend l'équation différentielle du premier exemple: $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0{}^2 . x = 0}$ ....(3)

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution est de la forme : $\boldsymbol{x(t) = A . e^{\alpha t}}$ .... (4)

On dérivant la relation (4), une fois pour obtenir la première dérivée, et une deuxième fois pour obtenir la dérivée seconde, puis on remplace ces derniers dans l'EDF (3) :

$\dot{x}(t) = A.\alpha.e^{\alpha t}$, $\ddot{x}(t) = A.\alpha^2.e^{\alpha t}$ obtient $A\alpha^2\, e^{\alpha t} + \omega_0{}^2.A.e^{\alpha t} = 0$

Après arrangement des termes, on aura: $Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + \omega_0{}^2) = 0$

Or $Ae^{\alpha t} \neq 0$ $=> \alpha^2 + \omega^2 = 0$ nc $=> \alpha = \pm j\omega_0$

La solution est de la forme:

$x(t) = A_1.e^{j\omega_0 t} + A_2.e^{-j\omega_0 t}$.

Ou $x(t) = A.cos(\omega_0.t) + B.sin(\omega_0.t)$.

Ou encore: $x(t) = D.\cos(\omega_0\,.t + \varphi)$.

Les coefficients $A_1, A_2, A\,, B\ et\ D$ se déterminent par les conditions initiales (CI).

<u>Quelques propriétés :</u> soit $x(t) = D.\sin\,(\omega_0.t + \varphi)$

- Mouvement harmonique « dû au terme sinusoïdal ».
- Mouvement périodique de période : $T_0 = \frac{2.\pi}{\omega_0}$ $[s]$
- Paramètres du mouvement harmonique simple :

  Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (exemple 1) ou $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (exemple 2) .

  ⇨ Fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2.\pi}$ $[Hz]$ou $[s^{-1}]$

- Amplitude $D\ [m]$ qui est une constante.
- Phase initiale $\varphi\ [rd]$.

8.3. La force dans le mouvement harmonique:

La force est donnée par l'équation fondamentale de la mécanique : $\sum \vec{F} = m.\vec{\gamma}$.

Pour un système à une dimension x : $F = m.\frac{d^2x}{dt^2}$ qui est égale aussi à $m.\ddot{x}$

Or l'équation différentielle est donnée par : $\ddot{x} + \omega_0{}^2.x = 0$,

En multipliant tout les termes par m on obtient : $m.\ddot{x} + m.\omega_0{}^2.x = 0$

=> $m.\ddot{x} = -m.\omega_0{}^2.x$ C'est une force de résistance dû au ressort.

=> $F = -k.x = -m.\omega_0{}^2.x$ le $m.\omega_0{}^2$ est une constante (C^{te}).

Donc, la force dans les mouvements harmoniques simples est proportionnelle au déplacement mais en sens inverse, et constitue une force de rappel ou de résistance au mouvement.

8.4. Energie mise en jeu dans un mouvement sinusoïdal:

$m.\ddot{x} + k.x = 0$, en multipliant les termes par $\dot{x}$ on aura : $\dot{x}.(m.\ddot{x} + k.x) = 0$

Or $\dot{x} = v = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}$ => $m.\dot{x}.\frac{d\dot{x}}{dt} + k.x.\frac{dx}{dt} = 0$ …………………………… (5)

Par intégration de la relation (5) on aura : $\frac{1}{2}.m.\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) + \frac{1}{2}.k.\frac{d}{dt}(x^2) = 0$

$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.k.x^2) = 0$ => $\frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2}.k.x^2 = 0$

$\boldsymbol{\frac{1}{2}.m.\dot{x}^2}$: représente l'énergie cinétique ;

$\boldsymbol{\frac{1}{2}.k.x^2}$: représente l'énergie potentielle.

$\Longrightarrow$ **Conservation de l'énergie totale du système**

Ou bien : $x(t) = A.cos\,(\omega_0.t + \varphi)$ => $\dot{x}(t) = -A.\omega_0.sin\,(\omega_0.t + \varphi)$

Or $T = \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2$ => $T = \frac{1}{2}.m.(-A.\omega_0.sin(\omega_0.t + \varphi))^2$ => $T = \frac{1}{2}.m.A^2.\omega_0{}^2.sin^2(\omega_0.t + \varphi)$

Et on a : $A^2.sin^2(y) + A^2.cos^2(y) = A^2 \Rightarrow A^2 sin^2(y) = A^2 - A^2.\cos^2(y)$

- $T = \frac{1}{2}.m.\omega_0{}^2.sin^2(\omega_0.t+\varphi) \Rightarrow T = \frac{1}{2}.m.\omega_0{}^2.(A^2 - x^2)$

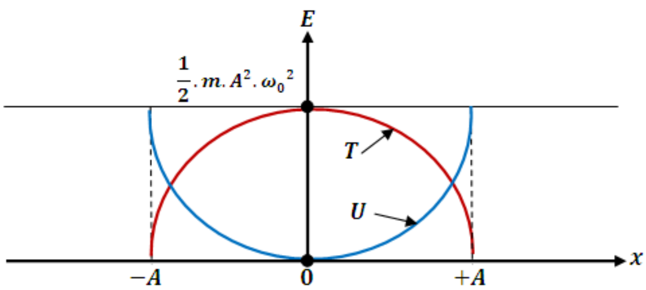
Si $x = 0 \Rightarrow T = T_{max} = \frac{1}{2}.m.A^2.\omega_0{}^2$.

Si $x = \pm A \Rightarrow T = T_{min} = 0.$

- $U = \frac{1}{2}.k.x^2$ $(F = -\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow -k.x = -\frac{\partial u}{\partial x}$ donc : $U = \frac{1}{2}.k.x^2)$.

Si $x = 0 \Rightarrow U = U_{min} = 0$.

Si $x = \pm A \Rightarrow U = U_{max} = \frac{1}{2}.m.A^2.\omega_0{}^2$.



Au centre $(x = 0)$: $\begin{cases} T = T_{max} = \dfrac{1}{2}.m.A^2.\omega_0{}^2 \\ U = U_{min} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2}.m.A^2.\omega_0{}^2$

Aux extrémums $(x = \pm A)$: $\begin{cases} T = T_{min} = 0 \\ U = U_{max} = \dfrac{1}{2}.m.A^2.\omega_0{}^2 \end{cases}$

$\Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2}.m.A^2.\omega_0{}^2$

Au cours d'une oscillation, les deux types d'énergies se transforment constamment l'un au l'autre : lorsque le corps (mobile) s'éloigne de la position d'équilibre, il ralentit et son énergie cinétique décroit, tandis que l'énergie potentille croit et passe par un maximum lorsque la vitesse s'annule.

Au cours du retour vers le zéro, l'énergie potentielle diminue puisque la force de rappel travaille pour accroitre l'énergie cinétique.

9. Composition des mouvements harmoniques :

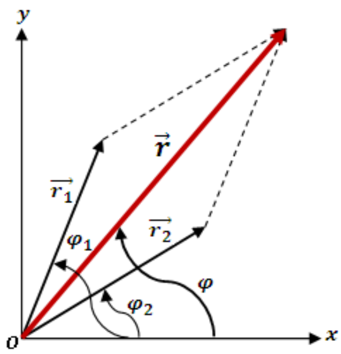
9.1. Composition des mouvements harmoniques de même direction :

9.1.1. Composition des mouvements de même pulsation:

Soit : $x_1(t) = A_1.\cos(\omega.t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = A_2.\cos(\omega.t + \varphi_2)$

On cherche : $x(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$ tel que : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

a. Méthode vectorielle :



$x_1 \rightarrow \vec{r_1}$ tel que : $\vec{r_1}\begin{cases}|\vec{r_1}| = A_1\\ \varphi_1\end{cases}$

$x_2 \rightarrow \vec{r_2}$ tel que : $\vec{r_2}\begin{cases}|\vec{r_2}| = A_2\\ \varphi_2\end{cases}$

On cherche : $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2} = ?$ tel que : $\vec{r}\begin{cases}|\vec{r}| = A = ?\\ \varphi = \ ?\end{cases}$

$\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2}$ => $|\vec{r}|^2 = |\vec{r_1}|^2 + |\vec{r_2}|^2 + 2.|\vec{r_1}|.|\vec{r_2}|.\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

$$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2.A_1.A_2.\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\boxed{A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2.A_1.A_2.\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

Par projection sur les axes ox et oy , on aura :

$$\begin{cases} ox:\ \ r.cos\varphi = r_1.cos\varphi_1 + r_2.cos\varphi_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)\\ oy:\ \ r.sin\varphi = r_1.sin\varphi_1 + r_2.sin\varphi_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots..(2)\end{cases}$$

On divisant l'équation (2) par l'équation (1), on aura :

$$\boxed{tg\varphi = \frac{r_1.sin\varphi_1 + r_2.sin\varphi_2}{r_1.cos\varphi_1 + r_2.cos\varphi_2}}$$

Conclusion : Le mouvement résultant de la projection de deux mouvements sinusoïdaux de même direction et même pulsation est un mouvement sinusoïdal de même pulsation ω.

$$\boxed{x(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)}$$

b. Méthode complexe :

Soit :

$$x_1(t) = A_1.\cos(\omega.t + \varphi_1) \Rightarrow z_1(t) = A_1\,.e^{j(\omega.t+\varphi_1)}$$

$$x_2(t) = A_2.\cos(\omega.t + \varphi_2) \Rightarrow z_2(t) = A_2\,.e^{j(\omega.t+\varphi_2)}$$

$$x(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi) \Rightarrow z(t) = A\,.e^{j(\omega.t+\varphi)}$$

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) \Rightarrow A\,.e^{j(\omega.t+\varphi)} = A_1\,.e^{j(\omega.t+\varphi_1)} + A_2\,.e^{j(\omega.t+\varphi_2)}$$

$$\Rightarrow A\,.e^{j\varphi} = A_1\,.e^{j\varphi_1} + A_2\,.e^{j\varphi_2}$$

$$\left|\begin{array}{l} A.cos\varphi = A_1.cos\varphi_1 + A_2.cos\varphi_2 \\ A.sin\varphi = A_1.sin\varphi_1 + A_2.sin\varphi_2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\varphi = \frac{A_1.sin\varphi_1 + A_2.sin\varphi_2}{A_1.cos\varphi_1 + A_2.cos\varphi_2}}$$

$$A^2.cos\varphi^2 = {A_1}^2.cos{\varphi_1}^2 + {A_2}^2.cos{\varphi_2}^2 + 2.A_1.A_2.cos\varphi_1.cos\varphi_2$$

$$A^2.sin\varphi^2 = {A_1}^2.sin{\varphi_1}^2 + {A_2}^2.sin{\varphi_2}^2 + 2.A_1.A_2.sin\varphi_1.sin\varphi_2$$

$$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2.A_1.A_2.\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2.A_1.A_2.\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

Propriétés :

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = cos\varphi_1.cos\varphi_2 + sin\varphi_1.sin\varphi_2$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = cos\varphi_1.cos\varphi_2 - sin\varphi_1.sin\varphi_2$$

c. Généralisation: Composition de N mouvements (m^{vts})

$$\boxed{A = \sqrt{\left(\sum A_i.cos\varphi_i\right)^2 + \left(\sum A_i.sin\varphi_i\right)^2}} \qquad \boxed{tg\varphi = \frac{\sum A_i.sin\varphi_i}{\sum A_i.cos\varphi_i}}$$

9.1.2. Composition des mouvements de pulsations différentes:

$$\left.\begin{array}{l} z_1(t) = A_1\,.e^{j(\omega_1.t+\varphi_1)} \\ z_2(t) = A_2\,.e^{j(\omega_2.t+\varphi_2)} \end{array}\right| \Rightarrow z(t) = z_1(t) + z_2(t) \quad \text{et} \quad z(t) = A\,.e^{j(\omega.t+\varphi)}$$

La résultante est périodique si $z(t) = z(t+T)$

$$A_1\,.e^{j(\omega_1.t+\varphi_1)} + A_2\,.e^{j(\omega_2.t+\varphi_2)} = A_1\,.e^{j(\omega_1.(t+T)+\varphi_1)} + A_2\,.e^{j(\omega_2.(t+T)+\varphi_2)}$$

$$\Rightarrow A_1\,.e^{j(\omega_1.t+\varphi_1)}.\left[e^{j\omega_1 T} - 1\right] + A_2\,.e^{j(\omega_2.t+\varphi_2)}.\left[e^{j\omega_2 T} - 1\right] = 0$$

Cette dernière équation a pour solution : $e^{j\omega_1 T} - 1 = 0 \;\; et \;\; e^{j\omega_2 T} - 1 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} e^{j\omega_1 T} = 1 \\ e^{j\omega_2 T} = 1 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_1 T = 2.n.\pi \\ \omega_2 T = 2.m.\pi \end{array}\right. \qquad \forall\, (n,m) \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}$$

Le mouvement résultant est périodique si et seulement si, les pulsations des deux mouvements sont co-mesurables.

La période de la résultante est :

$$\boxed{\begin{aligned} T &= n.\frac{2.\pi}{\omega_1} = n.T_1 \\ T &= m.\frac{2.\pi}{\omega_2} = m.T_2 \end{aligned}}$$

9.1.2.1. <u>Calcul de l’amplitude du mouvement résultant :</u>

Pour faciliter la tache, on prend : $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

Alors si $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $z(t) = A_1 . e^{j.\omega_1.t} + A_2 . e^{j.\omega_2.t}$

Qu’on peut écrire comme suit :

$$z(t) = \left[A_1 . e^{j.(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}).t} + A_2 . e^{-j.\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right).t}\right] . e^{j.\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).t}$$

Rappel : $\cos(a) + \cos(b) = 2.cos\left(\frac{a+b}{2}\right).cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

On pose la quantité $A_1 . e^{j.(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}).t} + A_2 . e^{-j.\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right).t} = A(t)$

Ce qui donne : $z(t) = A(t). e^{j.\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).t}$ qu’on peut écrire aussi sous la forme : $z(t) = A(t). \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).t$

Où :

$\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).t$: Terme représentant l’oscillation.

$A(t)$: Amplitude du mouvement résultant, et c’est une fonction du temps t.

$A(t) = A_1 . e^{j.(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}).t} + A_2 . e^{-j.\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right).t}$ => $A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + A_1 . A_2 . [e^{j.(\omega_1-\omega_2).t} + e^{-j.(\omega_1-\omega_2).t}]$

$$\boxed{A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2.A_1 . A_2 . \cos(\omega_1 - \omega_2) . t}$$

Le mouvement n’est pas sinusoïdal car l’amplitude est une fonction du temps, et qui varie entre deux valeurs : une valeur maximale A_{max} et une valeur minimale A_{min}. Tel que : $A_{min} = |A_1 - A_2|$, $A_{max} = |A_1 + A_2|$ et on dit que l’amplitude est **<u>modulée</u>** . Et on a :

Profondeur de modulation :

$$\boxed{\boldsymbol{m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}}}$$

Fréquence de modulation :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2}}$$

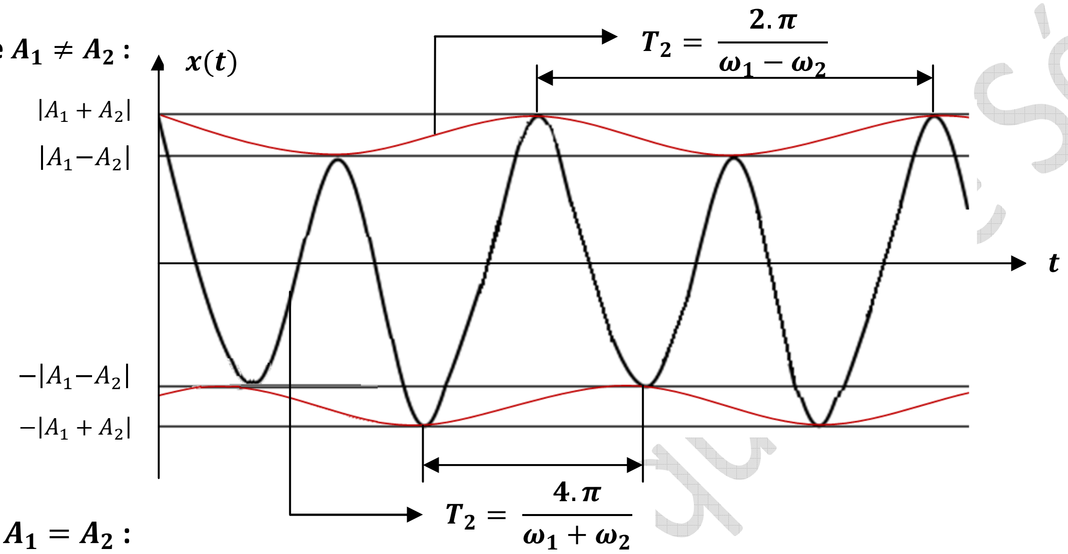
9.1.2.2. Phénomène de battement:

Ce phénomène se produit quand les deux mouvements auront des pulsations peu différentes ou très voisines « très proches » $\omega_{1\approx}\omega_2$.

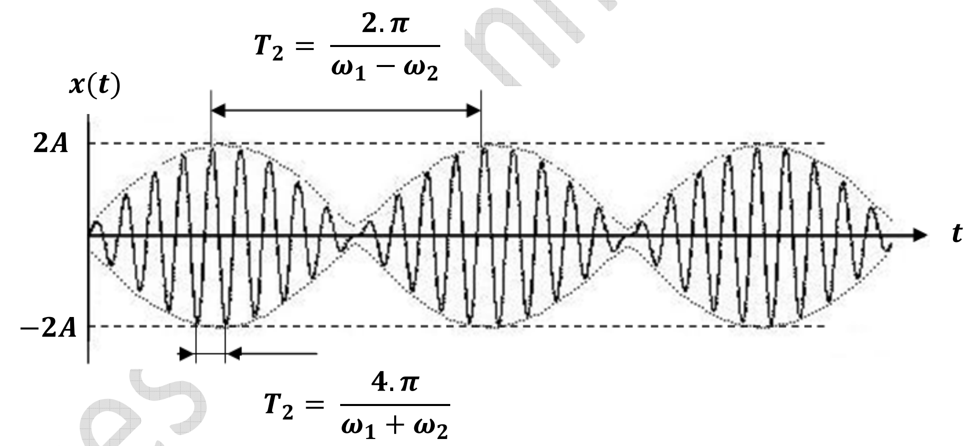
Si » $\omega_{1\approx}\omega_2$ cela implique que le mouvement $A(t)$ est lent, et on aura :

$$\begin{cases} A_{max} = |A_1 + A_2| \\ A_{min} = |A_1 - A_2| \end{cases} \Rightarrow \quad m = \frac{A_{max}-A_{min}}{A_{max}+A_{min}}$$ « Profondeur de modulation ».

Cas de $A_1 \neq A_2$:



Cas de $A_1 = A_2$:



Remarque:

Le phénomène de battement est **périodique** de **période** : $T_2 = \frac{2.\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ « de **pulsation** : $\omega_1 - \omega_2$ ».

La période d'une oscillation est : $T_2 = \frac{4.\pi}{\omega_1 + \omega_2}$.

9.1.2.3. Cas particulier de la modulation de l'amplitude :

Exemple :

$x_1(t) = a.\cos(\omega_1.t)$ $\qquad \omega_1 = \omega_0$

$x_2(t) = b.\cos(\omega_2.t)$ $\qquad \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$

$x_3(t) = c.\cos(\omega_3.t)$ $\qquad \omega_3 = \omega_0 - \Delta\omega$

9.2. <u>Mouvements sinusoïdaux perpendiculaires</u>:

Exemple : cas d'un corps se déplaçant sur un plan tel que ses coordonnées se déplacent selon x et y.

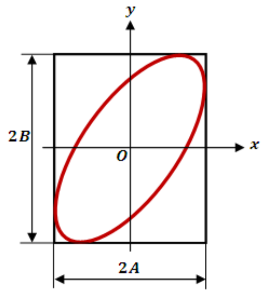
9.2.1. <u>Mouvements sinusoïdaux perpendiculaires de même pulsations :</u>

Soit deux mouvements sinusoïdaux de même pulsation :

- L'une selon l'axe ox : $x(t) = A.\cos(\omega.t)$
- La deuxième selon l'axe oy : $y(t) = B.\cos(\omega.t + \varphi)$

La résultante est une équation d'ellipse de centre O et contenu dans le rectangle: $x = \pm A$; $y = \pm B$.

$$\boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2.\frac{x.y}{A.B}\cos(\varphi) = sin^2(\varphi)}$$



<u>Cas particulier:</u>

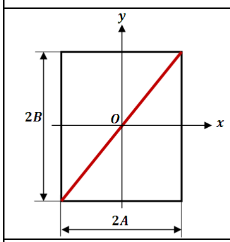
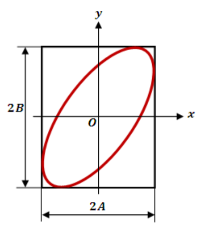
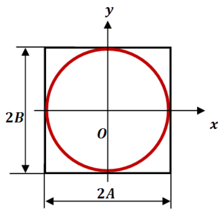
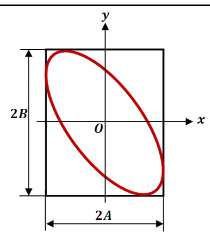
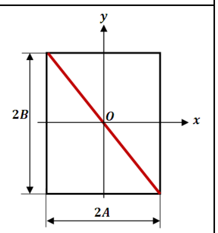
a- $\varphi = 0$ => $y = \frac{B}{A}.x$ C'est une équation d'une droite de pente supérieure à zéro

b- $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ => C'est une équation d'une Ellipse de pente supérieure à zéro

c- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ => $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$ C'est équation d'une Ellipse droite, si $A = B$ => Cercle

d- $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ => C'est une équation d'une Ellipse de pente inférieure à zéro

e- $\varphi = \pi$ => $y = -\frac{B}{A}.x$ C'est une équation d'une droite de pente inférieure à zéro

a	b	c	d	e
				
$\boldsymbol{\varphi = 0}$	$\boldsymbol{0 < \varphi < \frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi}$	$\boldsymbol{\varphi = \pi}$

9.2.2. Mouvements sinusoïdaux perpendiculaires de pulsations différentes:

Soit :

$x(t) = A.\cos(\omega_1.t)$ qu'on peut écrire sous la forme : $x(t) = A.\cos(\frac{2.\pi}{T_1}.t)$

$y(t) = B.\cos(\omega_2.t + \varphi)$ qu'on peut écrire sous la forme : $y(t) = B.\cos(\frac{2.\pi}{T_2}.t + \varphi)$

La résultante est périodique si x et y sont co-mesurable, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{m}{n}}$$

Ce qui donne : $x(t) = A.\cos(\frac{2.\pi}{T}.n.t)$ et $y(t) = B.\cos(\frac{2.\pi}{T}.m.t + \varphi)$

Le mouvement résultant a une trajectoire se situant dans le rectangle $(2A, 2B)$.

C'est une courbe fermée.

La forme dépend du rapport $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ et φ ; Ce sont les courbes de **Lissajous**.

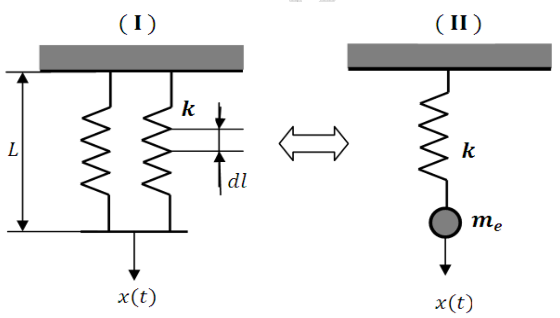
Le rapport $\frac{T_1}{T_2}$? C'est le rapport entre le nombre de points d'intersection de la courbe avec l'axe ox et le nombre de points d'intersection de la courbe avec l'axe oy.

10. Systèmes équivalents:

Le système équivalent est un système simple qu'on représente en générale par un ressort équivalent ou une masse équivalente.

10.1. Masse équivalente :

Cas où la masse m du ressort n'est pas négligeable par rapport à la masse M.



On remplace le système (I) par un système équivalent (II), dont l'action dynamique est la même.

$l = 0 \rightarrow L$

On a pour le système (I) :

La masse linéique du ressort $\bar{\rho} = \frac{m}{l}$.

La masse de l'élément dl : $m_s = \bar{\rho}.dl = \frac{m}{l}.dl$.

La vitesse des éléments du ressort :

$\dot{x}_s = f(l) = a.l + b$ la vitesse est une fonction de la longueur.

D'autres part :

$\dot{x}_{max} = \dot{x}_s(l = L) = \dot{x}$

$\dot{x}_{min} = \dot{x}_s(l = 0) = 0$ (point de fixatior

$\Rightarrow \quad \dot{x}_s = \frac{l}{L}.\dot{x}(t)$

L'énergie cinétique égale à la somme de toutes les énergies de ses éléments :

$$\Rightarrow \quad T = \int_l \frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}.dl\right).\left(\frac{l}{L}.\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{m.\dot{x}^2}{L^3}.\int_0^L l^2.dl$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}.\frac{m}{3}.\dot{x}^2$$

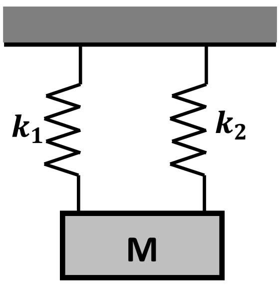
On a pour le système (II) :

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}.m_e.\dot{x}^2 \quad \text{tel que : } m_e = \frac{m}{3}$$

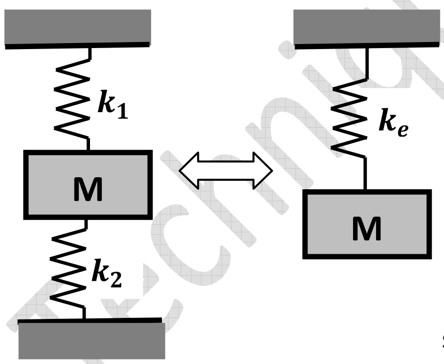
10.1. Ressort équivalent:

On a trois cas :

Premier cas : Cas de deux ressorts en parallèle et en opposition (distance négligeable).



Ressort en Parallèle « // »

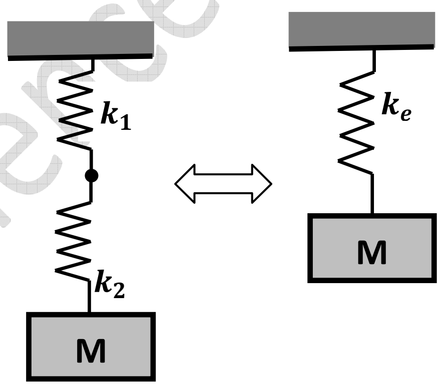


Ressort en opposition

$$\boxed{k_e = k_1 + k_2}$$

Puisque les forces de rappel s'ajoutent (on aura la même élongation $x = x_1 = x_2$

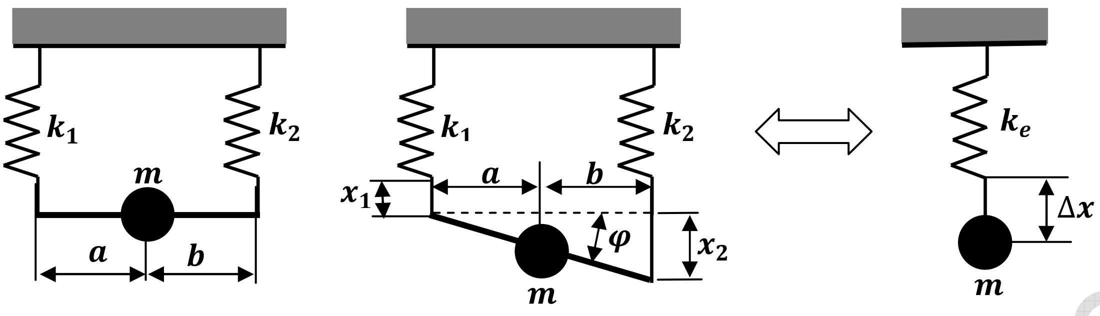
Deuxième cas: Cas de deux ressorts en série (distance négligeable).



$$\boxed{\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Puisque les allongements s'ajoutent (on aura des élongations différentes $x_1 \neq x_2$, $x = x_1 + x_2$

Troisième cas: Cas d'une barre liée à deux ressorts (distance non négligeable)



$$\boxed{k_e = \frac{(a+b)^2}{\left(\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}\right)}}$$

11. Analogie électrique-mécanique :

Mécanique	Electricité
Mouvement du corps $x(t)$	Charge électrique $q(t)$
Vitesse du mobile $\dot{x}(t)$	Courant électrique $i(t) = {}^{dq}/_{dt}$
Masse du mobile m	Bobine (self) L
Ressort k	Capacité ${}^{1}/_{C}$
Amortisseur α	Résistance R
Energie potentielle U	Energie électrique W_e
Energie cinétique E	Energie magnétique W_m