Chapitre II
Oscillations libres amorties des systèmes à un seul degré de liberté

1. Introduction :

Oscillations libres amortis des mouvements oscillatoires dont l'amplitude diminue au cours du temps jusqu'à son annulation.

Dans les oscillations des systèmes amortis, sous l'action des forces de frottement, les systèmes perdent de l'énergie mécanique sous forme de chaleur. Les forces de frottement résistent et s'opposent au mouvement du corps.

Dans ce chapitre on s'intéresse uniquement aux frottements visqueux où les forces sont proportionnelles à la vitesse.

Pour un amortissement liquide (fluide) :

Le mouvement est supposé visqueux si la force $F \sim \dot{x}$

Le mouvement est supposé turbulent si la force $F \sim \dot{x}^2$

1-2- Frottement visqueux des systèmes libres :

C'est Rayleigh qui a introduit initialement l'approximation par l'amortissement visqueux pour approcher les effets combinés de l'amortissement de l'air et l'hystérésis dans un diapason.

(**Hystéresis :** Soit une grandeur *cause* notée C produisant une grandeur *effet* notée E. On dit qu'il y a **hystéresis** lorsque la courbe E = f(C) obtenue à la croissance de C ne se superpose pas avec la courbe E = f(C) obtenue à la décroissance de C)

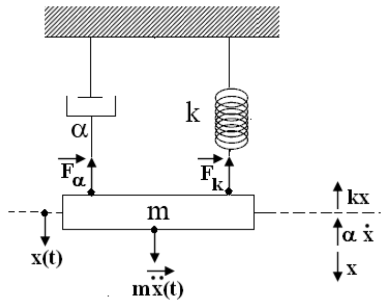
Cette approximation est utilisée seulement si les forces dissipatives sont petites, dans le cas contraire, une erreur considérable peut être introduite en supposant que l'amortissement est visqueux, alors qu'il ne l'est pas réellement.

Mathématiquement, c'est le frottement le plus simple : $\vec{F} = -\alpha \,.\, \vec{\dot{x}}$

Où α est le coefficient de frottement visqueux, c'est une constante réelle positive, fonction des propriétés physiques du milieu (ρ, μ, …) et de la géométrie, son unité est $N.S/m$

1- EQUATION DIFFERENTIELLE DU MOUVEMENT

Soit le système mécanique : Masse m, Ressort k, Amortisseur α



Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q$

Avec : $F_q = -\alpha.\dot{q}$

F_q représente la composante suivant q des forces de frottement (ce sont des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel)

Ou bien en utilisant la fonction de dissipation D :

$F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$ et $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$

Dans le cas d'un système mécanique (m, k, α) :

Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Energie potentielle $U = \frac{1}{2}kx^2$

Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$ $\quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$

Alors : $m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$

donc : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ C'est une équation différentielle de deuxième ordre

Forme générale de l'équation différentielle : $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Où : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ représente le facteur d'amortissement [1/s]

Et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du système

On définit également le taux d'amortissement ou le rapport d'amortissement (sans unité):

$$\xi = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\frac{\alpha}{2m}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$$

3. SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERNTIELLE DU MOUVEMENT :

Pour l'équation différentielle : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

On cherche une solution de la forme : $x = D.e^{r.t}$

L'équation caractéristique est donnée par : $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$

Elle admet deux racines : $r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Qui s'écrivent : $r_{1,2} = -\left(\frac{\alpha}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right) - \frac{k}{m}}$

La solution générale s'écrit alors :

$$x(t) = e^{-\delta.t}\left[D_1 e^{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right)-\frac{k}{m}}t} + D_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right)-\frac{k}{m}}t}\right]$$

D_1 et D_2 : sont des constantes qui dépendent des conditions initiales du mouvement

La courbe déplacement-temps correspondante à cette solution possède trois formes distinctes dépendant du radical : $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right) - \frac{k}{m}}$

Il existe 3 cas selon que ce radical soit : réel, nul ou imaginaire

<u>1er cas : le radical est réel</u> : $\delta^2 > \omega_0^2$

Le mouvement du système est dominé par l'amortissement. En déplacement et relâchement, le système atteint l'équilibre exponentiellement. Il n'ya pas d'oscillations qui se produisent.

Théoriquement le système ne retourne jamais à sa position initiale :

On dit que le système est **fortement amorti (Amortissement Fort)**.

Exemple de systèmes élastiques fortement amortis : Fermeture automatique d'une porte.

Le mouvement est exprimé par l'équation :

$$x(t) = e^{-\delta.t}\left[D_1 e^{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right)-\frac{k}{m}}t} + D_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right)-\frac{k}{m}}t}\right]$$

et peut être représenté sur la figure ci-dessous.

Remarques : $x(t)$ tend vers zéro avec l'augmentation du temps. Cet amortissement est caractérisé par un mouvement non sinusoïdal (pas d'oscillation)

<u>2ème cas : le radical est nul</u> : $\delta^2 = \omega_0^2$

Dans ce cas, le mouvement est caractérisé par un **amortissement critique**.

La valeur du coefficient d'amortissement pour lequel le système devient critiquement amorti est appelée : Coefficient d'amortissement critique, et notée α_c.

α_c est fonction des constantes du système m et k.

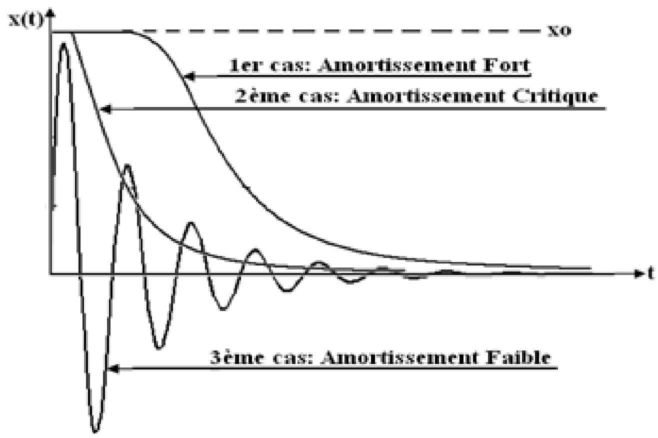
$$\delta^2 = \omega_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right) - \frac{k}{m} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_c = 4mk \quad \Longrightarrow \quad \alpha_c = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_0$$

Rapport d'amortissement critique (taux d'amortissement) :

$$\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}} = \frac{\propto}{\alpha_c}$$ c'est un paramètre adimensionnel.

Dans le cas d'un amortissement critique, le système est ramené à sa position d'équilibre en un temps minimum et sans oscillation. Mathématiquement les deux racines caractéristiques r_1 et r_2 de l'équation sont identiques, dans ce cas le déplacement s'écrit :

$$x(t) = (D_1 + D_2 t)e^{-\delta.t} = (D_1 + D_2 t)e^{-\frac{\alpha}{2m}.t}$$



<u>3ème cas : le radical est imaginaire</u> : $\delta^2 > \omega_0^2$

C'est le cas d'un amortissement harmonique dans lequel une oscillation se produit près de la position d'équilibre, et chaque amplitude diminue par rapport à celle qui la précède.

Dans ce cas la solution générale est exprimée comme suit :

$$x(t) = e^{-\delta.t}\left[D_1 e^{j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right)}t} + D_2 e^{-j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha^2}{4m^2}\right)}t}\right]$$

$$x(t) = e^{-\delta.t}\left[D_1 e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} + D_2 e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}\right]$$

Ou bien en forme trigonométrique :

$x(t) = e^{-\delta.t}[A.cos(\omega_a t) + B.sin(\omega_a t)] = Ce^{-\delta.t} sin(\omega_a t + \varphi)$

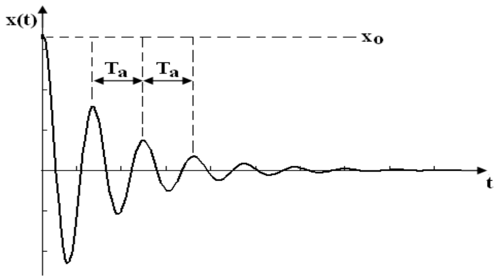
Avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$: la pulsation de l'harmonique amortie

ω_0 : la pulsation de l'harmonique non amortie

δ : le coefficient d'amortissement relatif

A, B, C, D1 et D2 sont des constantes qui peuvent être déterminées par les conditions initiales.

Le mouvement est montré par la figure ci-dessous :



La pulsation amortie ω_a et la pulsation non amortie ω_0 sont reliées pas la relation suivante :

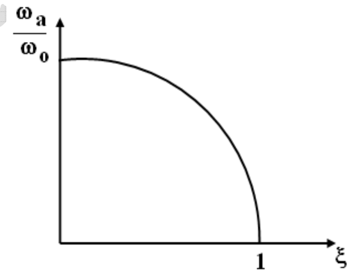
$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}$$

$$\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{où} \quad \xi = \frac{\delta}{\omega_0}$$

En fonction du taux d'amortissement, la pulsation naturelle amortie étant toujours inférieure à la pulsation naturelle non amortie ($\omega_a < \omega_0$).

La figure ci-dessous montre la diminution de la pulsation naturelle avec l'augmentation de l'amortissement. Cette caractéristique est obtenue par l'équation $\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ qui est légèrement transformée algébriquement à:

$\left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^2 + \xi^2 = 1$ et qui correspond à l'équation d'un cercle.

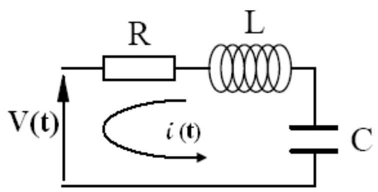


En génie mécanique, l'amortissement représente une petite fraction de l'amortissement critique, mais ne peut pas être négligé (< à 1/1000). Les systèmes amortis ayant un taux d'amortissement supérieur à $\xi = 0.2$ sont à considérer. La valeur typique de l'amortissement pour les par-chocs des automobiles est de l'ordre de $\xi = 0.1 \div 0.5$.

Par contre la valeur typique de l'amortissement pour le caoutchouc est plus petite, et est de l'ordre de $\xi = 0.04$

2- CAS D'UN SYSTEME ELECTRIQUE :

Soit le système électrique suivant :



On a : $V_R + V_L + V_C = V(t)$

Si $V(t) = 0$ (Sans potentiel d'excitation) : $V_R + V_L + V_C = 0$

$\Rightarrow R.i + L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

La charge $q(t)$ est liée au courant $i(t)$ par : $q(t) = \int idt$ $\quad \frac{dq}{dt} = i(t)$ $\quad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \quad R.\frac{dq}{dt} + L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad \Rightarrow \quad L.\ddot{q} + R.\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

$\Rightarrow \quad \ddot{q} + \frac{R}{L}.\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

$\Rightarrow \quad \ddot{q} + 2\delta.\dot{q} + \omega_0^2.q = 0$

Avec : $\delta = \frac{R}{2L}$ Et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Dans le cas d'un amortisseur Critique $\delta = \omega_0$

$\Rightarrow \quad \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\Rightarrow \quad R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

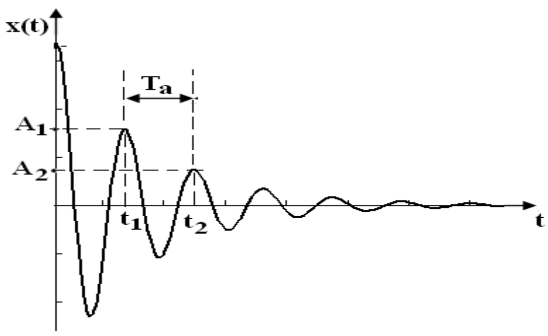
3- DECREMENT LOGARITHMIQUE:

C'est le Logarithme du rapport de deux amplitudes successives des oscillations amorties:

$D = Ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right)$ avec : $t_2 = t_1 + T_a$

Il caractérise le décroissance relative de l'amplitude de l'oscillation pendant une période.

$$D = Ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = Ln\left(\frac{x(t_1)}{t_1 + T_a}\right)$$



$x(t) = Ce^{-\delta.t}sin(\omega_a t + \varphi)$

$$D = Ln\left[\frac{Ce^{-\delta.t_1}sin(\omega_a t_1 + \varphi)}{Ce^{-\delta.(t_1+T_a)}sin(\omega_a(t_1 + T_a) + \varphi)}\right] = Ln\left[\frac{1}{e^{-\delta.T_a}}\right] = Ln\left[e^{\delta.T_a}\right] = \delta.T_a$$

Donc : $D = \delta.T_a$

D'autre part on a : $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$ et $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, $\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$

Donc :

$D = \delta.\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Le décrément logarithmique et le taux d'amortissement sont des constantes du système qui ne sont pas arbitraires, mais dépendantes des conditions de la surface, de la température, de la dimension, de la forme et d'autres conditions.

Comme exemple $D = 4$ est une valeur du décrément logarithmique d'un système absorbeur de choc dans une automobile. Après six mois d'utilisation le décrément diminue jusqu'à $D = 2$.

6- ENERGIE PERDUE PAR FROTTEMENT VISQUEUX

Soit un système mécanique (m, k, α).On suppose qu'il reçoit une énergie extérieure compensant son énergie perdue par frottement, de sorte que l'amplitude de ses vibrations reste constante. C'est-à-dire que l'énergie perdue par frottement visqueux est égale à l'énergie reçue de l'extérieur.

Le taux de dissipation de l'énergie par unité de temps est défini par :

$$\frac{dE}{dt} = f\frac{dx}{dt} = -\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

L'énergie dissipée au cours d'un cycle complet est :

$$\Delta E = \left|\int_t^{t+T_a} f dx\right| = \left|\int_t^{t+T_a} -\alpha\dot{x}dx\right| = \left|\int_t^{t+T_a} -\alpha\dot{x}^2 dt\right|$$

Pour un mouvement harmonique simple :

$$x(t) = x_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\dot{x}(t) = x_0\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Delta E = \left|-\alpha\int_t^{t+T_a}\left(x_0\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi)\right)^2 dt\right|$$

$$\Delta E = \left|-\alpha {x_0}^2{\omega_0}^2\int_t^{t+T_a}\left(cos(\omega_0 t + \varphi)\right)^2 dt\right|$$

$$\Delta E = \left|-\alpha {x_0}^2{\omega_0}^2\int_t^{t+T_a}\frac{1+cos2(\omega_0 t+\varphi)}{2}dt\right|$$

$$\Delta E = \left| -\frac{\alpha {x_0}^2 {\omega_0}^2}{2} \left[t + \frac{1}{2\omega_0} sin2(\omega_0 t + \varphi) \right]_t^{t+T_a} \right|$$

$\Delta E = \left| -\frac{\alpha {x_0}^2 {\omega_0}^2}{2} T_a \right|$ qui devient en supposant $T_a \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\Delta E = |-\pi \alpha {x_0}^2 \omega_0|$

$\Delta E = \pi \alpha {x_0}^2 \omega_0$

Par ailleurs, on peut examiner l'évolution de la force en fonction du déplacement :

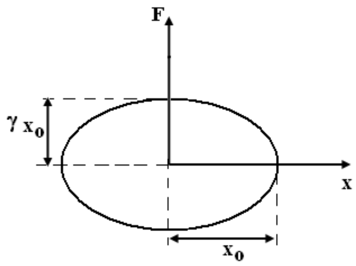
$F = -\alpha . \dot{x}$

et $x(t) = x_0 sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad sin(\omega_0 t) = \frac{x(t)}{x_0}$

$\dot{x}(t) = x_0 \omega_0 cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad cos(\omega_0 t) = \frac{\dot{x}(t)}{x_0 \omega_0} = \frac{-F}{\alpha x_0 \omega_0}$

Ce qui donne : $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{F}{\alpha x_0 \omega_0}\right)^2 = cos^2(\omega_0 t) + sin^2(\omega_0 t) = 1$

Le résultat obtenu est une équation d'ellipse qu'on représente sur la figure ci-dessous :



γ : Constante d'amortisser

L'aire de l'ellipse est l'énergie dissipée par cycle $\Delta E = \pi \alpha {x_0}^2 \omega_0$, l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude de mouvement. L'énergie dissipée dépend également de la fréquence.

7- FACTEUR DE QUALITE

La force de frottement $F = -\alpha . \dot{x}$ fait perdre au système son énergie mécanique à chaque période.

Le facteur de qualité est défini par :

$Q = 2\pi \frac{E_{max}}{|\Delta E|}$

E_{max} : Energie maximale stockée dans le système

$|\Delta E|$: Energie perdue par cycle

Pour un système (m, k, α) : $x(t) = x_0 sin(\omega_0 t)$

$E_{max} = \frac{1}{2} k x_{max}^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$ car $k = m\omega_0^2$

Donc : $Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}{\pi \alpha {x_0}^2 \omega_0} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0}{\alpha/m} = \frac{\omega_0}{2(\alpha/2m)}$

$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2(\delta/\omega_0)} \Rightarrow Q = \frac{1}{2\xi}$

Remarque : Lorsque les mouvements sont rapides, le décrément logarithmique n'est pas mesurable et sa mesure est remplacée par celle du facteur de qualité Q.

Cas d'un système électrique (R, L, C):

$E_{max} = \frac{1}{2C} q_{max}^2 = \frac{1}{2C} q_0^2 = \frac{1}{2} L\omega_0^2 q_0^2$ car $C = \frac{1}{L\omega_0^2}$

$\Delta E = \pi\alpha {x_0}^2 \omega_0$

$\Rightarrow \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{2\xi}$

8- AMORTISSEMENT SPECIFIQUE :

La capacité d'amortissement spécifique est définie comme étant la partie fractionnelle de l'énergie totale du système vibrant qui est dissipée durant chaque cycle du mouvement :

$\frac{\Delta \mathrm{E}}{\mathrm{E}}$

Pour un système simple avec coordonnées généralisées est directement liée au décrément logarithmique et au taux d'amortissement. On désigne le rapport $\Psi = \frac{\Delta E}{\mathrm{E}}$ le coefficient de dissipation de l'énergie ou (coefficient d'absorption) :

$$\Psi = \frac{\Delta E}{\mathrm{E}} = \frac{\pi\alpha {x_0}^2 \omega_0}{\frac{1}{2} k x_0^2} = 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{k}$$

$$\Psi = 2\pi \frac{\alpha}{m} \frac{\omega_0}{(k/m)} = 4\pi \frac{\alpha}{2m} \frac{\omega_0}{\omega_0^2} = 4\pi\delta \frac{1}{\omega_0} = \delta \frac{4\pi}{\omega_0} = 2\delta \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\Psi = 2\delta T = 4\pi \frac{\delta}{\omega_0} = 4\pi\xi$$

Or $D = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi \quad (\xi \ll \ )$

Donc : $\Psi = 2\delta T = 4\pi\xi = 2D$

L'énergie totale U peut être exprimée soit comme l'énergie potentielle maximale $\frac{1}{2} k x_0^2$, soit comme l'énergie cinétique maximale $\frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2$, les deux étant approximativement égales pour un amortissement faible. L'amortissement n'est souvent pas utilisé dans les vibrations mécaniques, sauf pour un amortissement faible (D < 0,01), ou il est utilisé pour la comparaison de la capacité d'amortissement.